APPLI-COURS – CORRIGE :

CROISSANCE – TEMPS DE DOUBLEMENT – PREVISION

Deux siècles de population au Royaume Uni (Alfred Marshall)

Dans ses *« Principes d'Economie Politique » (1890)*, Alfred Marshall donne l'évolution ci-dessous de la population totale du Royaume Uni entre 1700 et 1901.

Evolution de la population totale du Royaume Uni : 1700-1901 (en millions de personnes) (*)

Année	1700	1710	1720	1730	1740	1750	1760	1770	1780	1790
Pop "P"	5,475	5,24	5,565	5,796	6,064	6,467	6,736	7,428	7,953	8,675
MU		0,95708	1,06202	1,04151	1,04624	1,06646	1,0416	1,10273	1,07068	1,09078
Tau		-4,29%	6,20%	4,15%	4,62%	6,65%	4,16%	10,27%	7,07%	9,08%
MAM		0,99562	1,00604	1,00408	1,00453	1,00646	1,00408	1,00983	1,00685	1,00873
TCAM		-0,44%	0,60%	0,41%	0,45%	0,65%	0,41%	0,98%	0,69%	0,87%

Année	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901
Pop "P"	8,892	10,164	12	13,897	15,909	17,928	20,066	22,172	25,974	29,002	32,527
MU	1,02501	1,14305	1,18064	1,15808	1,14478	1,12691	1,11925	1,10495	1,17148	1,11658	1,12154
Tau	2,50%	14,30%	18,06%	15,81%	14,48%	12,69%	11,93%	10,50%	17,15%	11,66%	12,15%
MAM	1,00225	1,0[illegible]46	1,01674	1,01478	1,01361	1,01202	1,01133	1,01003	1,01595	1,01109	1,01154
TCAM	0,22%	1,35%	1,67%	1,48%	1,36%	1,20%	1,13%	1,00%	1,60%	1,11%	1,15%

(*) Sources : Alfred Marshall : *"Principes d'Economie Politique" - 1890 -*

NB : Les lignes du tableau permettent de réaliser les calculs. Elles ont en nombre aléatoire, et peuvent être modifiées.

Répondre aux questions ci-dessous (pour l'écriture algébrique, choisir « P » pour la variable population)

1) Quelle est la *périodicité* de cette série ?
2) Justifier la valeur encadrée (1,02501) en écrivant correctement sa formule algébrique
3) Quelle décennie a connu la plus forte croissance moyenne ? donnez son calcul.
4) Quelle décennie a connu la plus faible croissance moyenne (>0) ? donnez son calcul.
5) Justifier par l'histoire du pays considéré (événements, autres..) vos réponses aux questions 3 et 4.
6) Démontrer qu'en 201 ans (aux décimales près) la population sera multipliée par 6 (NB : il ne suffit pas de le constater)
7) En vous basant sur les décennies finales (1881, 1891, 1901), vérifier à l'aide d'une prévision que la population doit atteindre la valeur 32 millions (aux décimales près). Si possible utilisez plusieurs méthodes.

----

1) La série chronologique a une périodicité décennale, avec une exception, la ''décennie'' 1790-1801.
2) La valeur (1,02501) est le multiplicateur global de la décennie 1790-1801. Sa formule algébrique est :

$$\mathbf{{}_{90}\mu(P)_{101} = P_{101}/P_{90} = 8{,}892/8{,}675 = 1{,}02501}$$

3) La croissance moyenne mesurée par le multiplicateur annuel moyen (MAM) et/ou le Taux de croissance annuel moyen (TCAM), est **la plus élevée** pour la décennie 1811-1821. Elle est donnée par :
$_{11}TCAM(P)_{21} = (_{11}MAM(P)_{21} - 1)\times 100\%$ avec $_{11}MAM(P)_{21} = [_{11}\mu(P)_{21}]^{1/10}$
Soit l'expression numérique complète :
$_{11}TCAM(P)_{21} = [(12/10{,}164)^{1/10} - 1]\times 100\% = [1{,}18064)^{1/10} - 1]\times 100\% =$

(1,01674 – 1)×100% = 1,67%

On peut assimiler à cette décennie, la décennie 1871-1881 pour laquelle la croissance annuelle moyenne a été égale à 1,6%.

4) La croissance moyenne mesurée par le multiplicateur annuel moyen (MAM) et/ou le Taux de croissance annuel moyen (TCAM), est **la plus faible** (et >0) pour la décennie 1790-1801. Elle est donnée par :
$_{90}TCAM(P)_{101}$ = ($_{90}MAM(P)_{101}$ -1)×100% avec $_{90}MAM(P)_{101} = [_{90}\mu(P)_{101}]^{1/11}$
Soit l'expression numérique complète :
$_{90}TCAM(P)_{101} = [(8{,}892/8{,}675)^{1/11} – 1]\times100\% = [1{,}02501)^{1/11} – 1]\times100\% =$

(1,00225 – 1)×100% = 0,22%

5) Les résultats 3 et 4 reflètent l'histoire du Royaume Uni.
La croissance annuelle la plus faible est due aux *guerres napoléoniennes,* la décennie 1790-1801. (défaite de Napoléon en 1815)
La croissance la plus élevée est constatée deux fois : *après les guerres napoléoniennes* (décennie 1811-1821) et *au fait de l'Empire et de l'économie britannique sous Victoria* (décennie 1871-1881)

6) On peut constater à l'aide du tableau que sur les 201 années (1700-1901) la population a bien été multipliée par 6, à l'aide du multiplicateur global, soit :

$_{00}\mu(P)_{201} = P_{201}/P_{00} = 32{,}527/5{,}475 = 5{,}9410046$ soit = 6

Mais il faut le démontrer. On recourt pour cela à la formule du temps exact de doublement, qui est ici celle d'un sextuplement. Elle s'écrit :

D = ln(6) /ln ($_{00}MAM(P)_{201}$) ou = ln(6) /ln (1+ ($_{00}TCAM(P)_{201}$)

D = 1,7917595 / ln $(_{00}\mu(P)_{201})^{1/201}$ = 1,7917595 / **ln**$(5{,}9410046)^{1/201}$ = 1,7917595 / ln(1,0089045

= 1,7917595 / 0,0088651 = 202,11463 soit aux décimales près les 201 années constatées

7) Il y a trois méthodes de *prévision* pour démonter que la population atteint la valeur 32,527, lorsqu'on dispose des 3 décennies finales (P_{1901} étant supposée inconnue) :

Année	1881	1891	1901
Pop "P"	25,974	29,002	32,527
MU	1,17148	1,11658	1,12154
Tau	17,15%	11,66%	12,15%
MAM	1,01595	1,01109	1,01154
TCAM	1,60%	1,11%	1,15%
(*) Source			

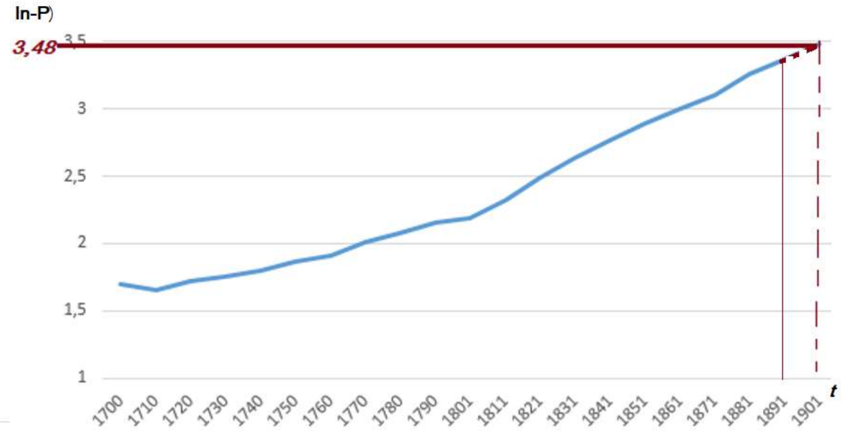
Les trois méthodes

A) La projection graphique dans le graph semi logarithmique
B) La formule de la croissance exponentielle ou FC_e
C) La recherche de l'équation de la droite de tendance par la méthode de Mayer

A) Pour construire le graph semi log on calcule les logarithmes des valeurs

Année	1700	1710	1720	1730	1740	1750	1760	1770	1780	1790	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901
Pop (P)	5,475	5,24	5,565	5,796	6,064	6,467	6,736	7,428	7,953	8,675	8,892	10,164	12	13,897	15,909	17,928	20,066	22,172	25,974	29,002	32,527
ln(P)	1,700	1,656	1,716	1,757	1,802	1,867	1,907	2,005	2,074	2,160	2,185	2,319	2,485	2,632	2,767	2,886	2,999	3,099	3,257	3,367	3,482

Par report des valeurs jusqu'à 1891 dans le graph d'ordonnée ln(P) et d'abscisse *t* (année) on obtient :



Par prolongation à la règle, de la courbe de 1891 à 1901, on trouve, en translatant en ordonnée, le logarithme de l'année 1901, soit $\ln(P_{1901}) = 3{,}48$.

La valeur de la population atteinte en 1901 est égale à $e^{\ln(P)1901} = e^{3{,}48} = 32{,}46$

B) La FC_e consiste à prolonger le trend de 1881-91 jusqu'à l'année 1901 en supposant constant le TCAM observé de 1881-91. L'expression de la FC_e s'écrit donc ici :

$$\hat{P}_{101} = P_{91}\,(1 + ({}_{81}TCAM(P)_{91}/100)^{101-91} = 25{,}974\,(1 + 0{,}0111)^{10}$$

$$\mathbf{= 25{,}974 \times 1{,}1167118 = 32{,}39}$$

C) La recherche de l'équation de la droite de tendance s'effectue aux points extrêmes 1881 (inf) et 1891 (sup) pour lesquels on dispose des logarithmes $\ln(P_{81}) = 3{,}257$ et $\ln(P_{91}) = 3{,}367$
En chaque point est vérifiée l'équation :
$Ln(P_t) = a.t + b$
Soit au point sup : $3{,}367 = 91.a + b$
au point inf : $3{,}257 = 81.a + b$
par soustraction $= 0{,}11 = 10.a \Rightarrow a = 0{,}11/10 = 0{,}011$

En reportant *a* dans *sup* : $3{,}367 = (91 \times 0{,}011) + b = 1{,}001 + b \Rightarrow b = 3{,}367 - 1{,}001 = 2{,}366$

Soit finalement l'équation de la droite de tendance : $\mathbf{\ln(P_t)\hat{} = 0{,}011.a + 2{,}366}$

Donc pour P_{101} : $\ln(P_{101})\hat{} = (0{,}011 \times 101) + 2{,}366 = 3{,}477$

Par exponentiation : $(P_{101})\hat{} = e^{3{,}477} = 32{,}36$

Conclusion : les trois méthodes donnent des résultats fiables car très proches de la valeur observée en 1901.

FIN DU CORRIGE